ALGEBRA

Polynomdivision

Themenheft

Mit vielen Übungen

Stand: 3. Oktober 2011

Datei Nr. 12116

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Polynomdivision

PROBLEMSTELLUNG:

Die folgenden Summen von Bruchtermen bringt man durch Addition auf einen Hauptnenner, also in eine Form, die man auch **Normalform** nennt:

$$\underbrace{x^2-5x+3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}_{\text{aufgespaltene Form}}=\underbrace{\frac{x^4-5x^3+3x^2-5x+7}{x^2}}_{\text{Normalform}}$$

$$\underbrace{2x+1-\frac{5}{x-3}}_{\text{aufgespaltene Form}}=\frac{(2x+1)\cdot(x-3)-5}{x-3}=\underbrace{\frac{2x^2-5x-8}{x-3}}_{\text{Normalform}}$$

Der Weg von links nach rechts ist leicht. Man muss eben so erweitern, dass alle Brüche denselben Nenner erhalten. Hier dazu noch einige Beispiele:

a) $2-\frac{3}{x}=\frac{2x-3}{x}$

b) $x+1+\frac{4}{x}=\frac{(x+1)\cdot x+4}{x}=\frac{x^2+x+4}{x}$

c) $x-1+\frac{4}{x^2}=\frac{(x-1)\cdot x^2+4}{x^2}=\frac{x^3-x^2+4}{x^2}$

d) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^4+4}{2\cdot x^2}$

e) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-\frac{4}{x}=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{4}{x}=\frac{x^2+2x-16}{4x}$

f) $2-\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$

g) $-1+\frac{18}{x^2+9}=\frac{-(x^2+9)+18}{x^2+9}=\frac{-x^2+9}{x^2+9}$

h) $x+\frac{4}{x+2}=\frac{x(x+2)+4}{x+2}=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$

i) $x+1-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-1)^2-2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x^2-2x+1)-2}{(x-1)^2}$

$$=\frac{x^3-2x^2+x+x^2-2x+1-2}{(x-1)^2}=\frac{x^3-x^2-x-1}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 1 Bringe auf die Normalform:

(a) $4-\frac{3}{x}$ (b) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{x}$ (c) $x+2-\frac{4}{x}$ (d) $\frac{1}{4}x-\frac{4}{x^2}$ (e) $\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{x}$

(f) $4x-1+\frac{3}{x^2-1}$ (g) $\frac{1}{2}x-3+\frac{x-1}{x^2+4}$ (h) $2x-\frac{5}{x+2}$ (i) $x+5+\frac{3x}{x^2-9}$

Für viele Zwecke (in der Oberstufe) muss man aber auch einen Bruch von der Normalform in einzelne Brüche aufspalten können!

Dies geht sehr einfach, wenn der Nenner des Bruchterms keine Summe enthält.
Es wird kompliziert und erfordert ein neues Rechenverfahren, wenn dies doch der Fall ist.

Grundaufgabe

Termumformungen von der Normalform in die aufgespaltete Form.

1. Fall: Der Nenner enthält keine Summe

a) $\frac{2x-4}{x}=\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}=2-\frac{4}{x}$

b) $\frac{x+8}{4x}=\frac{x}{4x}+\frac{8}{4x}=\frac{1}{4}+\frac{2}{x}$

c) $\frac{x^2-9}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{9}{x}=x-\frac{9}{x}$

d) $\frac{x^2+4}{2x}=\frac{x^2}{2x}+\frac{4}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$

e) $\frac{x^3-8}{4x}=\frac{x^3}{4x}-\frac{8}{4x}=\frac{x^2}{4}-\frac{2}{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{x}$

f) $\frac{x^3+x^2-4}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}=x+1-\frac{4}{x^2}$

g) $\frac{x^4-4}{8x^2}=\frac{x^4}{8x^2}-\frac{4}{8x^2}=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2x^2}$

Die Methode ist ganz klar:
Man zerlegt den Bruch in so viele einzelne Brüche, wie der Zähler Summanden hat.
Dann wird jeder dieser Einzelbrüche so weit wie möglich gekürzt.

Aufgabe 2

Zerlege so weit wie möglich in Einzelbrüche.

(a) $\frac{x+4}{8x}$ (b) $\frac{3x-4}{2x^2}$ (c) $\frac{4x+6}{3x}$ (d) $\frac{x^3-12x^2+4}{4x^2}$ (e) $\frac{x^4-64}{4x^2}$

Hinweise

Wie man in den Beispielen erkennt, hängt das Ergebnis der Aufspaltung so vom Bruch ab. Wir nennen die höchste vorkommende Hochzahl (Exponent) den Grad des Zählers bzw. Nenners.

Besitzen Zähler und Nenner den gleichen Grad (Beispiele a und b sowie Aufgabe 7a und 7c), dann bleibt vor dem Bruch eine Zahl (ggf. Bruchzahl) stehen.

Ist der Grad des Zählers dagegen größer als der des Nenners, dann bleibt nach der Zerlegung vor dem Bruch sogar noch x oder x^2 usw. stehen.

Die Zerlegung eines Bruches in Einzelbrüche ist im Grunde eine Division.

$$\frac{4x^2+3x-2}{x}=\frac{4x^2}{x}+\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}=4x+3-\frac{2}{x}$$

In den beiden ersten Teilbrüchen kann man durch x kürzen, und dies bedeutet doch, dass der Zähler jeweils durch x dividiert wird. Dies geht mit der letzten Zahl -2 nicht. Sie stellt sozusagen den Divisionsrest dar.

Zahlenbeispiel:

$$\begin{array}{l} \;741:6=123\ \text{Rest}\ 3 \\ \underline{-6} \\ \;\;14 \\ \underline{-12} \\ \;\;\;21 \\ \;\underline{-18} \\ \;\;\;\;3 \end{array}$$

Also gilt: $\frac{741}{6}=123+\frac{3}{6}$

Termbeispiel:

$$\begin{array}{l} \left(4x^2+3x-2\right):x=4x+3\ \text{Rest}\ -2 \\ \underline{-4x^2} \\ \;\;0\ +3x \\ \;\;\;\;\underline{-3x} \\ \;\;\;\;\;\;0-2 \end{array}$$

und $\frac{4x^2+3x-2}{x}=4x+3-\frac{2}{x}$

Der Rest wird jeweils noch durch den Nenner geteilt.

Nächstes Beispiel: $\frac{x^3-8}{4x}=\frac{x^3}{4x}-\frac{8}{4x}=\frac{x^2}{4}-\frac{2}{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{x}$

Jetzt als Division:

$$\begin{array}{l} \left(x^3-8\right):\left(4x\right)=\tfrac{1}{4}x^2\ \text{Rest}\ -8 \\ \underline{-x^3} \\ \;0\ -8 \end{array}$$

Also gilt: $\frac{x^3-8}{4x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{8}{4x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{x}$

Noch ein Beispiel:

$$\begin{array}{l} \left(2x^4-5x^3+x^2-x+8\right):\left(2x^2\right)=x^2-\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}\ \text{Rest}\ -x+8 \\ \underline{-2x^4} \\ \;\;0\ -5x^3 \\ \;\;\;\;\underline{-5x^3} \\ \;\;\;\;\;\;0\ +x^2 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\underline{+x^2} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;0\ -x+8 \end{array}$$

Also folgt: $\frac{2x^4-5x^3+x^2-x+8}{2x^2}=x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{-x+8}{2x^2}$

2. Fall: Der Nenner enthält eine Summe

Um einen Bruch zu zerlegen, der im Nenner eine Summe enthält, muss man mit Polynomdivision arbeiten!

Beispiel 1

$$\frac{x-2}{x+1}$$

$$\begin{array}{l} (x-2):(x+1)=1 \quad \text{Rest } -3 \\ -(x+1) \\ \hline \quad -3 \end{array}$$

Rechenmethode

Der Zählerterm enthält als „höchsten" Summanden x, ebenso der Nennerterm. Daher muss man ihn mit 1 multiplizieren, damit x und x untereinander stehen. Nun subtrahiert man und erhält – 3. Dies ist der Rest, denn es enthält ja kein x mehr. Der Rest muss noch dividiert werden, erscheint also im Zähler des sogenannten Restbruches.

Ergebnis: $\frac{x-2}{x+1}=1-\frac{3}{x+1}$

Hinweis:

Eine Division geht bei solchen Aufgaben in der Regel nie auf, d.h. es bleibt ein Rest übrig, den man nicht mehr teilen kann. Dieser taucht dann im Zähler des Restbruches auf, hier die Zahl - 3, das Minus wurde dann vor den Bruch gezogen.

Beispiel 2

$$\frac{x^2-9}{x-2}=?$$

Zuerst wird der „fehlende" Summand 0x eingefügt.
Dann wird (x-2) mit x multipliziert damit x^2 entsteht, denn x^2 muss ja bei der folgenden Subtraktion wegfallen.

Dabei bleibt dann 2x übrig, also wird (x-2) als nächstes mit 2 multipliziert. Der letzte Rest (Divisionsrest) ist -5. Er kommt in den Zähler des Restbruches, das Minuszeichen zieht man vor den Bruchstrich:

$$\begin{array}{l} (x^2+0x-9):(x-2)=x+2 \quad \text{Rest } -5 \\ -(x^2-2x) \\ \qquad 2x-9 \\ \quad -(2x-4) \\ \hline \qquad -5 \end{array}$$

Ergebnis: $\frac{x^2-9}{x-2}=x+2-\frac{5}{x-2}$.

HINWEIS: Wer sich unsicher ist, sollte die **Probe** machen und „zurück" rechnen, das heißt auf den Hauptnenner bringen und zusammenrechnen.

$$x+2-\frac{5}{x-2}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)}-\frac{5}{x-2}=\frac{x^2-4-5}{x-2}=\frac{x^2-9}{x-2}$$

Beispiel 3

$$\frac{x^3-x+1}{x-1}=?$$

$$\begin{array}{l} (x^3+0x^2-x+1):(x-1)=x^2+x \quad \text{Rest } 1 \\ -(x^3-x^2) \\ \hline \qquad x^2-x \\ \quad -(x^2-x) \\ \hline \qquad 0 \; +1 \end{array}$$

Ergebnis: $\frac{x^3-x+1}{x-1}=x^2+x+\frac{1}{x-1}$